

Sur la méthode de décomposition d'Adomian et ses applications en mécanique

MADI Belgacem¹, DIB Amar², SARI Mohamed Rafik², BOUZAOUIT Azzedine³,
BENCHOUIA Benchouia⁴

^{1,3} Université 20 Aout 1955 Skikda, Faculté de Technologie, Département de Génie Mécanique.

¹ Laboratoire d'Automatique et Informatique de Guelma, Université 8 mai 1945 Guelma.

² Université Badji Mokhtar Annaba, Faculté des Sciences de l'Ingénierat, Département de Génie Mécanique.

⁴ Université Cherif M'Saadia Souk-Ahra, Faculté de Technologie, Département de Génie Mécanique.

b_madi2000@yahoo.fr / b.madi@univ-skikda.dz

Résumé. Dans ce papier, nous décrivons la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Nous donnons une description générale de cette méthode et nous présentons leurs modifications. Des applications sont mis en équation telles que : le problème de Blasius, l'équation d'une onde dissipative et la vibration libre de la poutre d'Euler-Bernoulli. Les résultats obtenus sont discutés et montre l'efficacité de la méthode.

Mots clés: Méthode de décomposition d'Adomian, équation de Blasius, onde, vibration, poutre d'Euler-Bernoulli.

1. Introduction

La modélisation mathématique est l'art de décrire les problèmes du monde réel à travers des concepts mathématiques. Tout a son propre système. Un modèle conceptuel représente les idées essentielles sur le fonctionnement du système. Finalement, les modèles seraient analysés pour explorer la vérité derrière ces systèmes et l'appliquer pour prédire leur comportement dans le futur. Modèles mathématiques sous forme d'équations algébriques, équations différentielles et/ou aux dérivées partielles non linéaires et les équations intégrales surviennent généralement dans les domaines des sciences physiques, de l'ingénierie, des sciences sociales, A cet égard, les phénomènes non linéaires jouent un rôle crucial dans la conception des modèles mathématiques plus réalistes pour décrire la faisabilité de la nature.

Pour les modèles très compliqués avec de forte non linéarité ou singularités, les méthodes numériques sont potentiellement utiles. Une technique numérique classique capable de fournir une solution fiable pour les équations différentielles ordinaires (EDO) est la méthode de Runge-kutta. Pour les équations différentielles

aux dérivées partielles (EDP), les techniques utilisées sont basées le concept de discrétisation telles que la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis sont largement utilisé. Néanmoins, ces méthodes consomment plus le temps de calcul et l'effort de programmation.

Ces dernières années, les chercheurs ont mis l'accent sur les combinaisons entre les méthodes analytiques et les méthodes numériques. On s'attend ce que ces combinaisons répondent aux difficultés posés par différents problèmes. Les nouvelles approches issues des combinaisons sont appelées méthodes semi-analytiques. Parmi ses techniques modernes, la méthode de décomposition d'Adomian (ADM).

La méthode ADM a été introduite et développée pour la première fois par George Adomian ([Ado.1994], [Ado.1986]). Elle a reçu beaucoup d'attention de la part des chercheurs, au cours de ses dernières années, dans diverses disciplines. Elle est exceptionnelle en raison de ces polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian pour répondre au problème des termes non linéaires. Le principal avantage de l'ADM est que la solution semi-analytique est fournie sans linéarisation, discrétisation ou perturbation. En plus, cette méthode présente des avantages tels la convergence rapide.

Dans ce papier, nous allons appliquée la méthode ADM aux différents problèmes tels que l'équation de Blasius, l'équation d'une onde dissipative et le problème de vibration libre de la poutre d'Euler-Bernoulli. A travers les résultats obtenus de ses applications, nous allons montrer l'efficacité et les avantages que présente cette technique.

2. Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) est appliquée pour résoudre une large classe d'équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires, d'équations aux dérivées partielles, d'équations algébriques, d'équations aux différences, d'équations intégrales et d'équations intégro-différentielles [Ado.1990]. Les concepts fondamentaux de cette technique sont donnés par ce qui suit.

Considérons une équation différentielle non linéaire dont la forme générale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Fu(t) = g(t) \quad (1)$$

$$F = L + R + N \quad (2)$$

En substituant l'équation (2) dans l'équation (1), on obtient:

$$Lu(t) + Ru(t) + Nu(t) = g(t) \quad (3)$$

où L est opérateur facilement inversible, R est le reste de l'opérateur linéaire, N correspond aux termes non linéaires et g la source.

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} , l'équation (3) devient :

$$L^{-1}Lu(t) = L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t), \quad (4)$$

et la solution sera :

$$u(t) = \varphi(t) + L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \quad (5)$$

D'après la méthode ADM standard [Ado88, Ado94], la solution $u(t)$ peut être présentée comme une série :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \quad (6)$$

Nous fixons $u_0 = \varphi(t) + L^{-1}g(t)$, le terme non linéaire de $Nu(t)$ sera décomposé par la série infinie des polynômes d'Adomian :

$$Nu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (7)$$

où A_n est définie par la relation récurrente :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right] \right]_{\lambda=0} \quad (8)$$

En substituant (6) et (7) dans (5), il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (9)$$

Les expressions récurrentes suivantes définissent les composantes u_n obtenues par la méthode ADM telles que :

$$u_0 = \varphi(t) + L^{-1}g(t) \quad (10)$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \quad (11)$$

Finalement, la solution de l'équation (1) peut être exprimé comme des séries infinies :

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n \quad (12)$$

La convergence de la méthode ADM a été intensivement étudiée par Cherruault ([Che.1989], [Che.1993]) et Abbaoui et Cherruault [Abb.1994]. Actuellement, il existe de nouveaux résultats promoteurs où la convergence ne fait intervenir que des dérivées du terme non linéaire en un point. Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de vérifier les hypothèses de la convergence de la méthode.

3. Applications de la méthode ADM

Afin d'illustrer ses avantages décrites précédemment, nous considérons les trois problèmes ci-dessous dont le but est d'aboutir à la solution décrivant le comportement réel de telles problèmes.

3.1 Equation de Blasius

L'équation de Blasius est un problème célèbre découlant de la théorie de la couche limite de la mécanique des fluides. Dans ce problème, les équations de la couche limite sont réduite à des équations différentielles ordinaires [Sch.2004]. Le modèle mathématique décrivant un tel phénomène est équation différentielle non linéaire du troisième ordre :

$$f'''(\eta) + f''(\eta).f(\eta) \quad (13)$$

avec les conditions aux limites :

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (14)$$

Cette équation décrit le profil de vitesse dans la couche limite pour un fluide incompressible, visqueux, s'écoulant le long d'une plaque plane.

Introduisons l'opérateur L tel que :

$$L = \frac{d^3}{d\eta^3} \quad (15)$$

Alors, l'opérateur inverse est :

$$L^{-1} = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\cdot) d\eta d\eta d\eta \quad (16)$$

L'équation de Blasius peut s'écrire comme :

$$f'''(\eta) = -f''(\eta) \cdot f(\eta) \quad (17)$$

avec :

$$Lf = Nf = -f''f \quad (18)$$

L'introduction de L^{-1} conduit à :

$$f(\eta) = f(0) - f'(0)\eta - \frac{1}{2}f''(0)\eta^2 - L^{-1}(-f''f) \quad (19)$$

3.2 Equation d'une onde

L'équation des ondes a attiré beaucoup d'attention des chercheurs par le biais qu'elle régit de nombreuses expériences en ingénierie ainsi que la science. Vu sa complexité de résolution vis-à-vis les techniques numériques, nous essayons de donner une aperçue sur l'utilisation de la méthode ADM pour résoudre un tel problème. Pour ce faire considérons la forme générale d'une équation d'onde [Bia.2004] :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = A(x, y, z, t) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + B(x, y, z, t) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + C(x, y, z, t) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + D(x, y, z, t) \quad (20)$$

Avec les conditions :

$$P(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (21a)$$

$$\frac{\partial P(x, y, z, 0)}{\partial t} = g(x, y, z) \quad (21b)$$

L'application de la méthode ADM conduit à un algorithme alternatif permettant le calcul des polynômes d'Adomian. La formule récurrente résultant du traitement est exprimée par :

$$P_{n+1} = \int_0^t \int_0^t \left(A(x, y, z, t) \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + B(x, y, z, t) \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + C(x, y, z, t) \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} \right), n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

L'équation (22) conduite à la solution analytique de l'équation d'onde décrite par (20).

Il faut mentionner que les différentes modifications apportées sur la méthode ADM standard ont conduit à l'amélioration de cette méthode et reste à les appliquées au problème de l'équation d'onde.

3.3 Vibration libre de la poutre d'Euler-Bernoulli

Dans cette section, nous considérons le problème de vibration libre de la poutre d'Euler-Bernoulli en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian. Nous mettons l'accent sur quelques résultats décrits dans [Zhi.2012]. Pour ce faire, considérons le modèle mathématique modélisant la vibration d'une poutre d'Euler-Bernoulli uniforme, encastree - libre, de longueur l , subissant une vibration harmonique libre :

$$EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

où : A : l'aire de la section de la poutre,

E : Le module de Yong,

I : Le moment d'inertie de la section,

ρ : la densité de la matière,

$W(x, t)$: Déflexion de la poutre.

Pour un ode de vibration quelconque, la déflexion est donnée par :

$$W(x, t) = X(x)T(t) \quad (24)$$

où $X(x)$ représente la déflexion de la poutre et $T(t)$ une fonction harmonique dépendant du temps t . Utilisons la fréquence de rotation ω , nous obtenons :

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \omega^2 X(x)T(t) = 0 \quad (25)$$

De l'équation (25) dans (24), on obtient :

$$EI \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \rho A \omega^2 X(x) = 0 \quad (26)$$

Introduisons la dimension ξ telle que :

$$\xi = \frac{x}{l}, X(\xi) = \frac{X(x)}{l}, \lambda = \frac{\rho A \omega^2 l}{EI} \quad (27)$$

La substitution de (27) dans (26) donne :

$$\frac{\partial^4 W(\xi)}{\partial \xi^4} - \lambda W(\xi) = 0 \quad (28)$$

avec les conditions aux limites (à l'extrémité à droite, on suppose que $\xi = 1$) :

$$W(0) = W'(0) = 0 \text{ pour } \xi = 0 \quad (29a)$$

$$W''(0) = W'''(0) = 0 \text{ pour } \xi = 1 \quad (29b)$$

L'application de la méthode ADM conduite au résultat :

$$W(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k(\xi) = \lambda_i^k \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{(4k+i)!} W^{(i)}(0) \xi^{4k+1} \quad (30)$$

En tenant en compte les conditions aux limites données par (2.29), on obtient l'expression récurrente de la solution :

$$W_n(\xi) = \lambda_i^k \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k)!} W(0) \xi^{4k} + \sum_{k=0}^{n-} \frac{1}{(4k+i)!} W^{(i)}(0) \xi^{4k+1} \right] \quad (31)$$

4. Conclusion

Dans ce papier, la méthode de décomposition d'Adomian a été développée et appliquée pour différents problèmes tels que l'équation de Blasius, l'équation d'une onde dissipative et le problème de vibration libre de la poutre d'Euler-Bernoulli. Les modèles mathématiques décrits et les résultats de l'application de la méthode ADM sont significatifs et facilitent l'opération de programmation via l'outil informatique. Cette méthode est puissante et simple à mettre en œuvre, son amélioration réside dans la décomposition de l'opérateur non linéaire sous forme d'une série dont les éléments sont les polynômes d'Adomian. Le traitement numérique des résultats obtenus est l'un des perspectives majeure pour compléter ce travail.

5. Bibliographie

- [Ado.1994] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [Ado.1986] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press, San-Diego, 1986.
- [Ado.1990] G Adomian, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 7, Issue 13, 1990, pp. 17-43.
- [Che.1989] Y. Cherruault, *Convergence of Adomian's method*, *Kybernetes*, Vol. 2, Issue 18, 1989, pp. 31-38.
- [Che.1993] Y. Cherruault and G. Adomian, *A new proof of convergence*, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 18, Issue 12, 1993, pp. 103-106.
- [Abb.1994] K Abbaoui and Y Cherruault, *Convergence of Adomian's method applied to differential equations*, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol.5, Issue 28, 1994, pp. 103-109.
- [Sch.2004] H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, Springer, New York, (2004).
- [Bia.2004] J. Biazar, R. Islam, *Solution of wave equation by Adomian decomposition method and the restrictions of the method*, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 149, 2004, pp. 807-814.
- [Zhi.2012] Z. Liu et al., *Comparison of Adomian Decomposition Method and Differential Transformation Method for Vibration Problems of Euler-Bernoulli Beam*, *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 157-158, 2012, pp. 476-483.